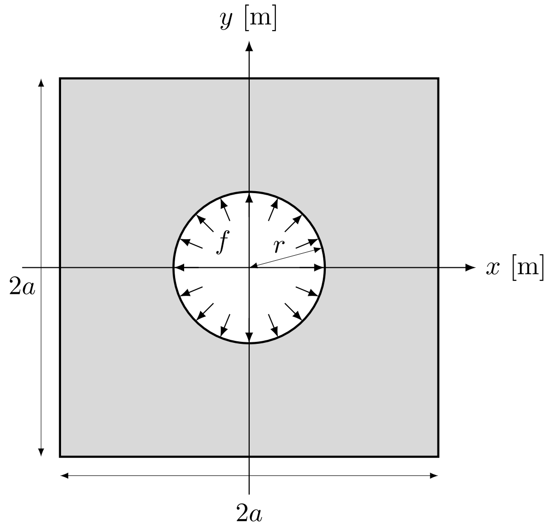
ANALYSE PAR ÉLÉMENTS FINIS D'UNE ÉQUATION STATIONNAIRE DE LA CHALEUR

Considérons une plaque d'Aluminium bidimensionnelle carrée Ω comportant un trou circulaire concentrique au carré. Nous nous intéresserons au problème du transfert de chaleur par conduction, donc nous rechercherons la distribution des températures, notée u, sur la plaque.

Le bord du carré, noté $\partial\Omega_u$, est soumis à une condition d'isolation thermique, où la température est fixée à $\hat{u}$. En revanche, le bord du cercle, noté $\partial\Omega_\sigma$, est soumis à une condition imposant un flux constant de chaleur f rentrant depuis l'extérieur dans la direction normale. De plus, la plaque est soumise à un flux de chaleur q agissant de manière uniforme sur sa surface.



Les paramètres numériques sont définis comme suit :

- Le côté du carré vaut $2a = 0.2$ m.
- Le rayon du cercle vaut $r = 0.03$ m.
- Le coefficient de conductivité thermique, étant admis constant, vaut $\kappa = 204$ W/(m·°C).
- La température fixée sur la frontière $\partial\Omega_u$ vaut $\hat{u} = 0$ °C.
- Le flux de chaleur par unité de surface au travers de la frontière $\partial\Omega_\sigma$ vaut $f = 200$ W/m^2.
- Le flux de chaleur par unité de volume vaut $q = 500$ W/m^3.

Les unités utilisées dans les calculs MATLAB sont le Watt (W), le Celsius (°C) et le mètre (m).

Description mathématique du problème

Le problème du transfert-chaleur par conduction revient donc à rechercher une fonction scalaire $u(x, y)$, interprétée comme une température stationnaire dans le point (x, y) du domaine Ω. Cette fonction satisfait l'équation différentielle et les deux conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} -\kappa \triangle u &= q && \text{dans } \Omega \\ u &= 0 && \text{sur } \partial\Omega_u \\ \kappa \frac{\partial u}{\partial n} &= f && \text{sur } \partial\Omega_\sigma \end{aligned}$$

où $\triangle = \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial y)^2}$ est le laplacien et n est le vecteur normal extérieure à la frontière $\partial\Omega_\sigma$.

La forme faible associée à ce problème consiste à rechercher $u \in \mathcal{U}$ tel que

$$\int_\Omega \kappa(\nabla u)^T \nabla\delta u \; dxdy = \int_\Omega q \, \delta u \; dxdy + \int_{\partial\Omega_\sigma} f \, \delta u \; ds$$

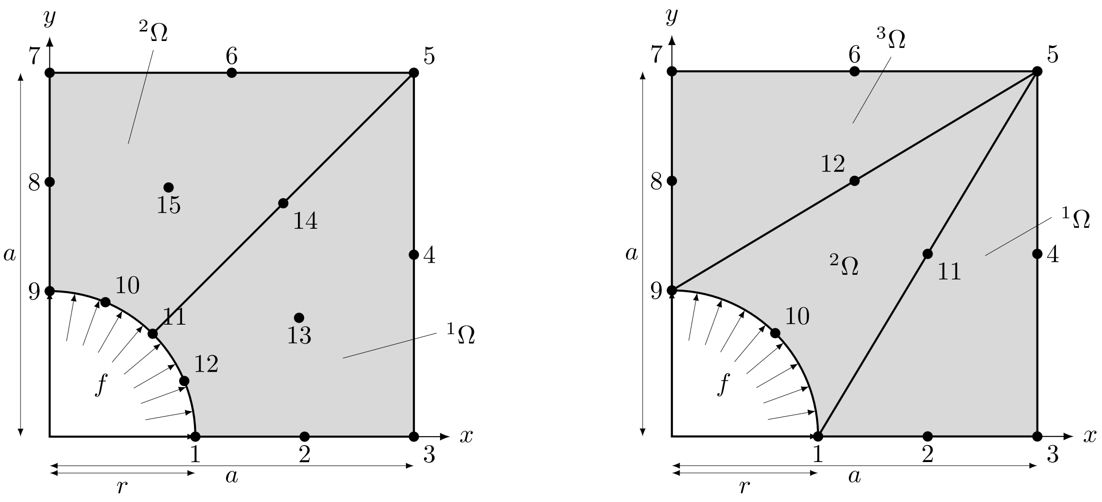
soit satisfaite quelle que soit la temperature virtuelle $\delta u \in \mathcal{V}$. Les espaces fonctionnels sont :

$$\mathcal{U} = \mathcal{V} = \{w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u\}.$$

Discrétisation par éléments finis

En exploitant la double symétrie du problème (c.f. exercice 1 série 8) nous limiterons notre analyse à un quart du carrée. Le domaine sera discrétisé à l'aide de deux maillages distincts, illustrés ci-dessous :

- Le premier maillage sera constitué de deux éléments finis isoparamétriques quadrangulaires biquadratiques lagrangiens, comportant 9 points nodaux chacun.
- Le second maillage sera formé de trois éléments finis isoparamétriques triangulaires biquadratiques lagrangiens, comportant 6 points nodaux chacun.



(a) Quadrangulaires biquadratiques   (b) Triangulaires biquadratiques

Tâches

Écrire un script MATLAB qui réalise l'analyse par éléments finis en suivant les étapes ci-dessous :

(1) Définir les propriétés géométriques et matérielles ainsi que les coordonnées des nœuds du maillage. Stocker les coordonnées dans deux matrices, de tailles 15×2 et 12×2, appelées respectivement `nodes_quad` et `nodes_trg`. Remarquez que, par exemple, le nœud 2 est situé à égale distance des nœuds 1 et 3. Il en va de même pour les nœuds 13, 12 et 4, et ainsi de suite pour les autres nœuds intérieurs.

(2) Les fonctions biquadratiques correspondant aux éléments quadrangulaire et triangulaire archétypes ont été déjà définies respectivement dans deux matrices appelées `He_quad` et `He_trg`.

(3) Définir les deux matrices de connectivité reliant la numérotation locale et globale des nœuds, une pour les éléments quadrangulaires `connectivity_quad` (matrice 9×2) et une deuxième pour les éléments triangulaires `connectivity_trg` (matrice 6×3). Les matrices de connectivité sont données ci-dessous

$^a\Omega$	$^1\Omega$	$^2\Omega$
1	1	11
2	3	5
3	5	7
4	11	9
5	2	14
6	4	6
7	14	8
8	12	10
9	13	15

Table 1. Quadrangulaires

$^a\Omega$	$^1\Omega$	$^2\Omega$	$^3\Omega$
1	1	1	7
2	3	5	9
3	5	9	5
4	2	11	8
5	4	12	12
6	11	10	6

Table 2. Triangulaires

(4) Pour chaque élément fini, définir la transformation isoparamétrique, calculer la matrice jacobienne ainsi que le jacobien et l'inverse de la matrice jacobienne.

Transformations	jacobienne	jacobien	inverse de la jacobienne
`transf_quad1`	`jacobian_matrix_quad1`	`jacobian_quad1`	`inv_jacobian_matrix_quad1`
`transf_quad1`	`jacobian_matrix_quad2`	`jacobian_quad2`	`inv_jacobian_matrix_quad2`
`transf_trg1`	`jacobian_matrix_trg1`	`jacobian_trg1`	`inv_jacobian_matrix_trg1`
`transf_trg2`	`jacobian_matrix_trg2`	`jacobian_trg2`	`inv_jacobian_matrix_trg2`
`transf_trg3`	`jacobian_matrix_trg3`	`jacobian_trg3`	`inv_jacobian_matrix_trg3`

Table 3. Conventions de nommage des variables

(5) Calculer les matrices de conductivité élémentaires et les vecteurs élémentaires des sources. Pour accélérer les calculs des intégrales sur les éléments archétypes, vous pouvez utiliser les fonctions déjà définies `gaussian_quadrature_quad` et `gaussian_quadrature_trg`.

Conductivité élémentaires	Sources élémentaires
`conductivity_quad1`	`sources_quad1`
`conductivity_quad2`	`sources_quad2`
`conductivity_trg1`	`sources_trg1`
`conductivity_trg2`	`sources_trg2`
`conductivity_trg3`	`sources_trg3`

Table 4. Conventions de nommage des variables

(6) Assembler la matrice de rigidité et le vecteur des forces appliquées et les affecter aux variables appelées respectivement `conductivity_global_quad` de taille 15×15, `conductivity_global_trg` de taille 14×14, et `sources_vect_quad` de taille 15×1, `sources_vect_trg` de taille 14×1.

(7) Imposer les conditions aux limites et résoudre le système linéaire pour trouver le vecteur contenant les valeurs approchées de la température u^h aux points nodaux non soumis à des conditions aux limites essentielles. Affecter les vecteurs aux variables appelées `temperature_quad` (taille 10×1) et `temperature_trg` (taille 7×1).

(8) (Facultatif) Commenter et comparer les deux solutions approchées calculées.